Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Rechnen Modulo** n
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (1) Berechnen Sie:

a) $11 \cdot 18 \cdot 2322 \cdot 13 \cdot 19 \bmod 7$,

b) $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 113 \bmod 13$,

c) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{19} \bmod 5$.

Aufgabe 2 (1)

a) Wenn zur Zeit 13:37 Uhr ist, wie viel Uhr ist es in 100000 Minuten?

b) Wenn Petra 1997 an einem Montag Geburtstag hatte, an welchem Wochentag hat sie im Jahr 2018 Geburtstag?

c) Wenn der 22. Tag eines Jahres ein Mittwoch ist, was für ein Wochentag ist dann der 193. Tag desselben Jahres?

Aufgabe 3 (2)

a) Was ist die kleinste natürliche Zahl, die den Rest 1 bei Division durch 6 und den Rest 3 bei Division durch 5 hat?

b) Gibt es eine natürliche Zahl, die den Rest 1 bei Division durch 6, den Rest 3 bei Division durch 5 und den Rest 8 bei Division durch 10 hat?

c) Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl, die den Rest 1 bei Division durch 2, den Rest 2 bei Division durch 3, den Rest 3 bei Division durch 4 usw. bis den Rest 9 bei Division durch 10 hat?

Aufgabe 4 (2)

a) Beweisen Sie:
Ist $ab \equiv ac \bmod n$ und $a \not\equiv 0 \bmod n$, dann ist $b \equiv c \bmod n$.

b) Beweisen Sie: Ist $a \equiv b \bmod n$, so gilt auch $a^k \equiv b^k \bmod n$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

c) Zeigen Sie: $6^k \equiv 6 \bmod 10$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

d) Berechnen Sie die folgenden Werte: i) $11^{100} \bmod 5$, ii) $5^{100} \bmod 3$, iii) $3^{102} \bmod 5$.

Aufgabe 5 (2) Berechnen Sie:

a) $2^8 \bmod 17$,

b) $3^8 \bmod 17$,

c) $3^{14} \bmod 29$,

d) $2^{14} \bmod 29$,

e) $4^{14} \bmod 29$,

f) $5^{14} \bmod 29$,

g) $11^{100} \bmod 5$,

h) $5^{100} \bmod 3$,

i) $3^{102} \bmod 5$.

Aufgabe 6 (2) Zehnerpotenzen

a) Wir suchen eine Regel für die Teilbarkeit durch 11.

i) Berechnen Sie $10^k \bmod 11$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

ii) Zeigen Sie: Die Zahl $(z_n \dots z_1 z_0)_{10}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre Wechselsumme $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k z_k$ durch 11 teilbar ist.

b) Finden Sie die Regeln für die Teilbarkeit durch 8 und 9.

c) Berechnen Sie den Rest bei der Division von 10^{42} durch 14 sowie 10^{42} durch 22. (*Hinweis:* Stellen Sie 42 als Summe der Zweierpotenzen dar und berechnen Sie 10^{2^ℓ} mod 14 bzw. 22 für verschiedene Zweierpotenzen 2^ℓ.)

Aufgabe 7 (2) Teilbarkeitsregeln

a) Wir suchen eine Regel für die Teilbarkeit durch 11.

  i) Berechnen Sie 10^k mod 11 für alle $k \in \mathbb{N}$.

  ii) Zeigen Sie: Die Zahl $(z_n \dots z_1 z_0)_{10}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre Wechselsumme $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k z_k$ durch 11 teilbar ist.

b) Finden Sie die Regeln für die Teilbarkeit durch 8 und 9.

c) Finden Sie eine Regel für die Teilbarkeit durch 27.

Aufgabe 8 (2) Berechnen Sie den Rest bei der Division von 10^{42} durch 14 sowie 10^{42} durch 22.
(*Hinweis:* Stellen Sie 42 als Summe der Zweierpotenzen dar und berechnen Sie 10^{2^ℓ} mod 14 bzw. 22 für verschiedene Zweierpotenzen 2^ℓ.)

Aufgabe 9 (2)

a) Zeigen Sie: Teilt man eine Quadratzahl durch 7, so bleibt nie der Rest 3, 5 oder 6.

b) Beweisen Sie ohne Induktion:

  i) $5^n + 7$ ist fur alle $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar.

  ii) $n^2 - 1$ ist fur alle ungerade $n \in \mathbb{N}$ durch 8 teilbar.

Aufgabe 10 (2) Was ist der Rest von 10^{42} bei Division durch 61?

Aufgabe 11 (3) Schreiben Sie die Zahlen von 1 bis 9 hintereinander. Streichen Sie 3 mal in Folge entweder die Zahl ganz links oder ganz rechts (z.B. 1, 9, 8 oder 1, 2, 3 etc.). Addieren Sie die 3 gestrichenen Zahlen und Teilen Sie das Ergebnis durch 6 (wieso teilt 6 diese Zahl?); die 4 liegt nun an der Stelle ihres Ergebnisses.
Dies funktioniert auch für die Zahlen von 1 bis 14, das Streichen von 4 Zahlen und das Teilen durch 10; die 5 steht dann an der richtigen Stelle.
Wie verallgemeinert man dies?

Aufgabe 12 (3) Beweisen Sie: Die kleinste positive ganze Zahl e, für die $a^e \equiv 1 \bmod p$ ist, muss ein Teiler von $p-1$ sein. (*Hinweis:* Schreiben Sie $p - 1 = ke + r$, $0 \leq r < e$, und benutzen Sie, dass $a^{p-1} \equiv a^e \equiv 1 \bmod p$ ist.)